ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1988

MATHEMATIQUES I

T.A

On considère la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ dans laquelle *t et x sont réels.*

Quand cette série converge, on désigne sa somme par $f_t(x)$.
Le but du problème est l'étude, pour certaines valeurs du paramètre t, de la fonction qui à x associe $f_t(x)$.

PREMIERE PARTIE

I.1. Etablir que la série que l'on vient de définir converge pour tout x et pour tout t.

I.2. Montrer que, t étant fixé, la fonction qui à tout x associe $f_t(x)$ est de classe C^1, et exprimer sa dérivée, que l'on notera $f_t'(x)$, comme somme d'une série.

I.3. Etablir la relation $f_{t+1}(x) = x\, f_t'(x)$

I.4. Exprimer $f_0(x)$ et $f_1(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

DEUXIEME PARTIE

On se propose d'étudier la fonction f_t, qui à x associe $f_t(x)$, lorsque t est un entier naturel.

II.1. Etablir que, pour tout t entier strictement positif, il existe un polynôme P_t tel que, pour tout réel x :
$f_t(x) = e^x P_t(x)$
et que le polynôme P_t vérifie la relation de récurrence : $\forall t \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R},\ P_{t+1}(x) = x\,(P_t(x) + P_t'(x))$.

II.2.a) Donner les coefficients de P_1, P_2, P_3, P_4.
b) Déterminer le degré de P_t et montrer que les coefficients de P_t sont des entiers naturels.

II.3. On note $a_{t,k}$ le coefficient de x^k dans $P_t(x)$
a) Donner une formule reliant $a_{t+1,k}$ à $a_{t,k-1}$ et $a_{t,k}$ en précisant pour quels couples (t , k) elle est valable.
b) Déterminer $a_{t,t}$ et $a_{t,1}$ pour $t \geq 1$.
c) Déterminer $a_{t,2}$ et $a_{t,t-1}$ pour $t \geq 2$.

II.4. Etudier les variations de $f_t(x)$ et de $f_t'(x)$ en fonction de x lorsque x décrit $\mathbf{R}_+$. Montrer que $f_t(x)$ est équivalent à $x^t e^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

TROISIEME PARTIE

III.1. Soit $(U_n)_{n \in N^*}$ et $(V_n)_{n \in N^*}$ deux suites à termes positifs, telles que les séries de termes généraux U_n^2 et V_n^2 convergent. Etablir que la série de terme général $U_n V_n$ converge et que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n V_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2\right)$$

III.2.a) En déduire que, pour tout couple (t, t') de réels et pour tout $x > 0$:

$$\left(f_{\frac{t+t'}{2}}(x)\right)^2 \leq f_t(x)\, f_{t'}(x)$$

b) Etablir, pour tout $x > 0$, les inégalités :

$$f_{\frac{1}{2}}(x) < x^{\frac{1}{2}} e^x \qquad f_{\frac{3}{2}}(x) \leq x\, e^x \sqrt{1+x}$$

III.3. On pose, pour tout $x > 0$ et pour tout t : $q_t(x) = f_t(x)\, x^{-t} e^{-x}$. On pose de plus, pour tout *entier* $m \geq 0$:

$$r_m(x) = q_{\frac{m+1}{2}}(x) \,/\, q_{\frac{m}{2}}(x)$$

TOURNER LA PAGE

a) Etablir que, pour tout $x > 0$, la suite qui à m associe $r_m(x)$ est croissante.

b) Quel est le signe de $r_1(x) - 1$?
En déduire le signe de $r_m(x) - 1$ pour $m \in \mathbf{N}^*$.
c) Etablir que, pour tout $x > 0$ et tout $m \in \mathbf{N}^*$: $f_{m+\frac{1}{2}}(x) > x^{m+\frac{1}{2}} e^x$

III.4.a) Etablir pour $x > 0$ et pour $m \in \mathbf{N}^*$ une majoration de $f_{m+\frac{1}{2}}(x)$ utilisant P_m et P_{m+1}.
b) En déduire que l'on a, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f_{m+\frac{1}{2}}(x) - x^{m+\frac{1}{2}} e^x$$

c) Etendre cette équivalence au cas $m = 0$ (on utilisera la question III.2.).

QUATRIEME PARTIE

On suppose ici $t = -1$; on s'intéresse donc à l'unique fonction f_{-1}, que l'on notera F.

IV.1. Etablir l'existence de l'intégrale $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$ et montrer que sa valeur est $F(x)$.

IV.2. Etudier le sens de variation de F et de sa dérivée.

IV.3. Etablir que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^t}{t}\, dt$ a un sens et en déduire que, lorsque x tend vers $-\infty$, on peut écrire

$F(x) = -\ln|x| + A + o(1)$
où A est une constante que l'on ne cherchera pas à évaluer.

IV.4. Etablir la formule, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$F(x) = e^x \left(\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} \right) - \ln x - b_n + n! \int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}\, dt + F(1)$$

où $C_1, C_2 \ldots, C_n$ et $\frac{b_n}{e}$ sont des entiers naturels que l'on précisera.

IV.5. Etudier pour n entier au moins égal à 2 les variations de la fonction $t \to \frac{e^t}{t^n}$ dans l'intervalle $[1, +\infty[$

Etablir que, pour x assez grand, la plus grande valeur prise par cette fonction sur $[1, x]$ est $\frac{e^x}{x^n}$

IV.6. En déduire, pour tout n entier naturel, le développement valable quand x tend vers $+\infty$

$$F(x) = e^x \left(\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \right)$$

Quelle est la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{x^n}$?

**** FIN ****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail